Analiza II.2*

Egzamin, 24 czerwca 2023

UWAGA: Każde zadanie oddajemy na oddzielnej kartce. Prosimy o czytelne pisanie rozwiązań – prace nieczytelne nie będą sprawdzane.

Zadanie 1: Niech $S^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) : \ x_1^2 + \cdots x_n^2 = 1\}$ będzie sferą jednostkową a μ_{n-1} miarą powierzchniową na S^{n-1}. Rozważmy zbiór

$$A_n = \{x \in S^{n-1} : \ x_1^2 + x_2^2 > \frac{1}{n}\}.$$

Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{n-1}(A_n)}{\mu_{n-1}(S^{n-1})}.$$

✓ Zadanie 2: Niech

$$\omega = (1-z)\, dx \wedge dy + 2xe^{x^2} \cos y\, dx \wedge dz - e^{x^2} \sin y\, dy \wedge dz.$$

Obliczyć wartość całki $\int_{S,or} \omega$, gdzie $S = S_1 \sqcup S_2$ jest sumą półsfery oraz pół-elipsoidy zawartych w brzegu obszaru

$$K = \{(x,y,z) : \ \tfrac{x^2}{4} + \tfrac{y^2}{4} + \tfrac{z^2}{9} \le 1 \le x^2 + y^2 + z^2, \qquad z \ge 0\}.$$

Orientacja *or* jest orientacja brzegu obszaru K

✓ Zadanie 3: Niech

$$\omega = \frac{(x-1)dy - ydx}{(x-1)^2 + y^2} - \frac{(x+1)dy - ydx}{(x+1)^2 + y^2}.$$

a) Sprawdzić, że ω jest 1-formą zamkniętą.

b) Czy ω jest zupełna na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0), (1,0)\}$?

c) Czy ω jest zupełna na $\mathbb{R}^2 \setminus I$, gdzie $I = \{(x,y) : \ y = 0, \ x \in [-1,1]\}$?

Zadanie 4: Niech $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ będą powierzchniami (rozmaitościami wymiaru 2) takimi, że w każdym punkcie $p \in S_1 \cap S_2$ kierunki normalne do powierzchni S_j nie pokrywają się. Pokazać, że przecięcie $S_1 \cap S_2$ jest gładką krzywą (rozmaitością wymiaru 1) w $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 5: Niech

$$T = \{(x,y,z) : \ (\sqrt{x^2+y^2} - 3)^2 + z^2 < 1\}$$

oraz $T^* = T \setminus \{(3,0,0)\}$. Obliczyć wymiary i podać generatory przestrzeni kohomologii $H^k(T^*)$.